Über Projectivitäten und Involutionen auf ebenen rationalen Curven dritter Ordnung.

Von Prof. Dr. **Emil Weyr.**

1. Es sei C_3^4 eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte d; $i_1 i_2 i_3$ seien die drei Inflexionspunkte und $J_1 J_2 J_3$ ihre Tangenten. Die von den Inflexionspunkten an die Curve gehenden Tangenten mögen sie respective in den Punkten $t_1 t_2 t_3$ berühren. Die drei Paare $i_1 t_1$, $i_2 t_2$, $i_3 t_3$ sind drei Paar conjugirter Punkte der Curve und bilden als Gegenecken ein vollständiges Vierseit. Die Punkte $i_1 i_2 i_3$ liegen auf einer und derselben Geraden J.

Die Curve C_3^4 ist von der vierten Classe, hat also mit irgend einem Kegelschnitte acht gemeinschaftliche Tangenten. Ist der Kegelschnitt dem Dreiseite $J_1 J_2 J_3$ eingeschrieben, so bleiben nur noch zwei gemeinsame Tangenten zurück, weil jede der drei Inflexionstangenten doppelt zählt. Dies gibt in bekannter Weise die Möglichkeit, die Curve als rationalen Tangententräger zu erkennen. Wählt man nämlich irgend eine feste Tangente A von C_3^4, so wird jeder dem Vierseite $J_1 J_2 J_3 A$ eingeschriebene Kegelschnitt mit der Curve eine variable Tangente gemeinsam haben. In dieser Art ist nun das Tangentensystem der Curve C_3^4 eindeutig auf die dem Vierseit eingeschriebene Curvenreihe zweiter Classe bezogen.

Es ist selbstverständlich, dass die Berührungspunkte eines Tangentensystemes von C_3^4 ein Punktsystem derselben Art bilden; insbesondere bilden also die Berührungspunkte einer beliebigen Tangenteninvolution von C_3^4 eine Punktinvolution desselben Grades. Die Doppelelemente beider Involutionen entsprechen sich als Tangente und Berührungspunkt.

2. Ist die Gerade A des vorhergehenden Artikels nicht eine Tangente, sondern beliebig in der Ebene von C_3^4 gezogen, so bestimmt jede dem Vierseit $J_1 J_2 J_3 A$ eingeschriebene Curve zweiter Classe mit C_3^4 zwei gemeinsame Tangenten, welche Tan-

gentenpaare (sowie deren Berührungspunkte) auf C_3^4 offenbar eine quadratische Involution bilden. Betrachtet man in dem erwähnten Vierseit die degenerirten Kegelschnitte, so kommt man sofort zu dem folgenden Resultate:

„Die drei Tangentenpaare (respective deren Berührungspaare), welche man an C_3^4 aus den Schnittpunkten der drei Inflexionstangenten mit einer beliebigen Geraden legen kann, gehören einer quadratischen Involution an."

3. In dieser Art entspricht aber jeder Geraden A der Curvenebene eine quadratische Tangenten- (Punkt-) Involution. Aber auch umgekehrt wird durch jede quadratische Involution auf C_3^4 eine Gerade der Ebene bestimmt. Sind nämlich $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ irgend zwei Tangentenpaare der Involution, so besitzen die diese Tangentenpaare berührenden und dem Wendedreiseit $J_1 J_2 J_3$ eingeschriebenen zwei Kegelschnitte noch eine vierte gemeinschaftliche Tangente A, von welcher offenbar wieder die gegebene Involution abgeleitet wird.

4. Es sind aber auch die dreifach berührenden Kegelschnitte der Curve C_3^4 mit den Geraden der Ebene in eindeutige Beziehung gesetzt. Bekanntlich liefert jede quadratische (Punkt-) Involution von C_3^4 einen dreifach berührenden Kegelschnitt der Curve und jeder dreifach berührende Kegelschnitt bestimmt als Involutionskegelschnitt eine quadratische Involution auf C_3^4.[1]

Da nun jede Involution einer Geraden A entspricht und umgekehrt, so wird auch jeder Geraden A ein dreifach berührender Kegelschnitt und umgekehrt entsprechen. Wir wollen diese Gerade A als die der Involution und dem dazugehörigen dreifach berührenden Involutionskegelschnitte „beigeordnete" Gerade (oder Axe) bezeichnen.

5. Geht die Gerade A in die die drei Inflexionspunkte enthaltende Gerade J über, so sind $i_1 i_2 i_3$ die Schnitte derselben mit den drei Inflexionstangenten und die drei aus diesen Punkten an C_3^4 gehenden Tangentenpaare haben $i_1 t_1$, $i_2 t_3$, $i_3 t_3$ zu Berührungspunkten; da nun dies drei Paar conjugirter Punkte der Curve sind, so ist die der J Geraden entsprechende Involution jene der conjugirten Punkte.

[1] Siehe: „Über dreifach berührende Kegelschnitte" u. s. w., Sitzungsb. vom 11. December 1879.

„Der Involution conjugirter Punkte der Curve ist die, die drei Inflexionspunkte enthaltende Gerade J als Axe beigeordnet.“

Wenn man also dem Vierseit $J J_1 J_2 J_3$ einen beliebigen Kegelschnitt einschreibt, so besitzt er mit C_3^4 noch zwei gemeinschaftliche Tangenten, welche die Curve in zwei conjugirten Punkten berühren. Zwei solche Tangenten (welche sich in einem Punkte von C_3^4 schneiden) kann man conjugirte Tangenten nennen und dann sagen, dass je zwei conjugirte Tangenten einen dem Vierseite $J J_1 J_2 J_3$ eingeschriebenen Kegelschnitt berühren. Die beiden Doppelpunktstangenten $D' D''$ stellen jede für sich auch conjugirte Tangentenpaare vor, woraus folgt:

„Die beiden durch den Doppelpunkt d gehenden und dem Vierseit $J J_1 J_2 J_3$ eingeschriebenen Kegelschnitte berühren in d die Tangenten $D' D''$ dieses Punktes.“

Bekanntlich ist d der Pol von J bezüglich des Dreiseits $J_1 J_2 J_3$ und auch bezüglich des der Involution conjugirter Punkte zugehörigen Involutionskegelschnittes, welcher die Curve in $t_1 t_2 t_3$ berührt und auch die Doppelpunktstangenten $D' D''$ zu Tangenten hat.

6. Die den sämmtlichen Involutionen, welche ein gemeinsames Elementenpaar besitzen, entsprechenden beigeordneten Geraden umhüllen einen dem Dreiseit $J_1 J_2 J_3$ eingeschriebenen Kegelschnitt. Denn sind $A_1 A_2$ die Tangenten des erwähnten Paares, so wird die beigeordnete Gerade eine Tangente des durch die fünf Geraden $J_1 J_2 J_3 A_1 A_2$ bestimmten Kegelschnittes sein müssen.

„Die den centralen Punktinvolutionen beigeordneten Geraden umhüllen einen Kegelschnitt K_c welcher die Inflexionstangenten $J_1 J_2 J_3$ in den drei Punkten berührt, in denen sie von den harmonischen Polaren der Inflexionspunkte $i_1 i_2 i_3$ geschnitten werden.[1]“

Jede Centralinvolution ist dadurch charakterisirt, dass das Paar der Nachbarpunkte des Doppelpunktes ihr angehört; hieraus folgt nach Obigem, dass die den Centralinvolutionen beigeordneten Geraden jenen Kegelschnitt umhüllen, welcher dem Dreiseite $J_1 J_2 J_3$ eingeschrieben ist und zugleich die beiden Doppelpunktstangenten $D' D''$ berührt. Wenn $o_1 o_2 o_3$ die Ecken des Drei-

[1] Der Kegelschnitt K^c ist die Poloconik der Geraden J.

seits $J_1 J_2 J_3$ sind, so sind die drei Geraden $do_1 do_2 do_3$ oder $P_1 P_2 P_3$ die harmonischen Polaren der drei Inflexionspunkte. Die Tangenten $D'D''$ sind nach Art. 5 die Doppelstrahlen der durch die drei Strahlenpaare do_1, di_1; do_2, di_2; do_3, di_3 bestimmten Involution. Da jedoch (weil d der Pol von J bezüglich $\Delta o_1 o_2 o_3$ ist) di_1 und do_1 harmonisch conjugirt sind bezüglich do_2 und do_3 u. s. w., so sind $D'D''$ dreifache Strahlen einer kubischen Involution, für welche di_1, di_2, di_3; do_1, do_2, do_3 zwei Strahlentripel sind.[1] Wenn allgemein α_k der Schnittpunkt von P_k mit J_k ist, so sind die beiden Punkte α_k und i_k harmonisch conjugirt bezüglich der beiden auf ihrer Verbindungslinie liegenden Punkte o. In $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ berührt ein Kegelschnitt K_c die drei Inflexionstangenten und es ist, wie aus dem oben Gesagten sofort folgt, d der Pol von J bezüglich dieses Kegelschnittes und da die durch das Tripel $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ auf diesem Kegelschnitte bestimmte Involution dritten Grades mit zwei dreifachen Punkten diese Punkte in den Schnittpunkten von K_c mit J hat (siehe l. c. Art. 41) und weil sich ferner diese Involution von d aus in der früher erwähnten kubischen Strahleninvolution projicirt, so sind die von d aus nach den Schnitten von J und K_c gehenden Strahlen die beiden Doppelpunktstangenten $D'D''$; es ist also K_c wirklich der Kegelschnitt, welcher von den, den centralen Involutionen beigeordneten Geraden umhüllt wird.

Der Involutionskegelschnitt der Involution conjugirter Punkte (der Cayley'sche Kegelschnitt von C_3^4) hat auch d zum Pole von J und berührt ebenfalls $D'D''$, woraus folgt:

„Der Kegelschnitt K_c hat mit dem Cagley'schen Kegelschnitte eine doppelte Berührung und zwar ist die die drei Inflexionspunkte enthaltende Gerade J die Berührungssehne.“

„Die auf J liegenden Berührungspunkte der genannten zwei Kegelschnitte sind somit die dreifachen Elemente einer kubischen Involution, welche durch das Punktetripel $i_1 i_2 i_3$ bestimmt erscheint.“

7. Da eine Inflexionstangente als Doppeltangente (mit zusammenfallenden Berührungspunkten) zu betrachten ist, so bilden

---

[1] Siehe: „Grundzüge einer Theorie der kubischen Involutionen“, Abhandl. der kgl. böhm. Ges. d. Wissensch., Prag 1874, Art. 12.

die aus den Punkten einer Inflexionstangente an die Curve C_3^4 gehenden Tangentenpaare eine quadratische Involution und ebenso ihre Berührungspunkte. Man übersieht sofort, dass die beiden anderen Inflexionstangenten (respective ihre Berührungspunkte) die Doppelelemente dieser Involution darstellen. In dieser Art liefert jede der drei Inflexionstangenten eine bestimmte quadratische Involution auf C_3^4. Die durch J_1 z. B. bestimmte hat $J_2 J_3$ als Doppelelemente und die beiden Tangenten J_1 und $i_1 t_1$ stellen offenbar auch ein Paar dieser Involution dar u. s. w.

Hieraus folgt nun weiter, dass die diesen Involutionen beigeordneten Geraden unbestimmt sind und Büschel bilden. So ist der durch J_1 bestimmten Involution jede durch o_1 gehende Gerade, der durch J_2, respective J_3 bestimmten Involution ist jede durch o_2, respective o_3 hindurchgehende Gerade beigeordnet.

Da der Involutionskegelschnitt im Allgemeinen die Curve C_3^4 in jenen drei Punkten berührt, welche zugleich begleitende Punkte ihrer Paare sind,[1] so wird der Involutionskegelschnitt der durch J_1 bestimmten Involution die Curve C_3^4 in i_2 und i_3 und in t_1 berühren u. s. w.

8. Ausser diesen Involutionen kann man noch jene betrachten, welche durch zwei t-Punkte als Doppelelemente gegeben sind und kann schliesslich auch nach jenen drei Involutionen fragen, welche die drei sechspunktigen Kegelschnitte der Curve als Involutionscurven liefern. Es ist mir nicht gelungen, auch diesen sechs mit der Curve C_3^4 innig verbundenen Involutionen synthetisch beizukommen und sollen daher die betreffenden Fragen auf Grund der Parameterrelation einer geraden Punktgruppe beantwortet werden. Wenn man den Nachbarpunkten des Doppelpunktes die Parameterwerthe o, ∞ beilegt, so ist eine gerade Punktgruppe x_1, x_2, x_3 charakterisirt durch die Gleichung:

$$x_1 x_2 x_3 = K \quad (1)$$ [2]

[1] „Über dreifach berührende Kegelschnitte“ u. s. w., Sitzungsb. vom 11. December 1879.

[2] Siehe: „Geometrische Mittheilungen,“ II. Sitzungsb. vom 19. Mai 1870; „Über die Abbildung einer rationalen ebenen Curve dritter Ordnung auf einen Kegelschnitt“, Sitzungsb. vom 20. März 1879, Art. 12.

Diese Gleichung kann man allgemeiner auffassen als charakteristische Gleichung irgend einer Involution dritten Grades zweiter Stufe, in welcher dem neutralen Elementenpaare die Parameterwerthe o, ∞ ertheilt worden sind. (Man vergleiche: „Über Involutionen n-ten Grades und k-ter Stufe, Sitzungsbericht vom 17. April 1879.)

Es sei nun auf C_3^4 eine quadratische Involution gegeben durch zwei Elementenpaare, welche wieder durch je eine quadratische Gleichung

$$ax^2+bx+c=o$$
$$a'x^2+b'x+c'=o$$

gegeben sein mögen. Die Gleichung der Involution lautet dann

$$(ax^2+bx+c)-\lambda(a'x^2+b'x+c')=o \qquad (2)$$

oder

$$(a-\lambda a')x^2+(b-\lambda b')x+(c-\lambda c')=o. \qquad (2')$$

Sind nun $x_1 x_2$ die beiden Elemente (Punkte) der Gruppe λ und y etwa das dieses Paar begleitende Element (Punkt), so ist nach (1)

$$x_1 x_2 y=k.$$

Ferner ist aus (2'):

$$x_1 x_2=\frac{c-\lambda c'}{a-\lambda a'},$$

somit:

$$k=\frac{c-\lambda c'}{a-\lambda a'}\cdot y,$$

woraus:

$$\lambda=\frac{ak-cy}{a'k-c'y}$$

folgt. Die Gleichung (2) kann, wenn man diesen Werth für λ einsetzt, geschrieben werden:

$$k(ab'-a'b)x+k(ac'-a'c)+y[(ac'-a'c)x^2+ +(bc'-b'c)x]=o. \qquad (2'')$$

Hieraus folgt zunächst die uns schon bekannte Thatsache, dass die Elementenpaare $(x_1 x_2)$ der Involution und die sie

begleitenden Elemente y in zwei- ein- deutiger Beziehung stehen; die Gleichung (2′′) ist die Verwandtschaftsgleichung, welche diese Beziehung zum Ausdrucke bringt.

Aus der Form (2′′) unserer Involutionsgleichung folgt für

$$y = o, \quad k(ab' - a'b)x + k(ac' - a'c) = o;$$

die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$x_1 = \infty \text{ und } x_2 = -\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Für $y = \infty$ ergibt sich

$$(ac' - a'c)x^2 + (bc' - b'c)x = o;$$

die Wurzeln sind

$$x_1 = o, \quad x_2 = -\frac{bc' - b'c}{ac' - a'c}.$$

Es sind somit die Parameter der zwei Punkte, welche mit den Nachbarpunkten o, ∞ des Doppelpunktes Paare bilden offenbar

$$-\frac{bc' - b'c}{ac' - a'c} \qquad -\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

und zwar sind respective ∞ und o die begleitenden Punkte dieser Paare. Man kann selbstverständlich die Involution durch diese beiden Paare bestimmen; setzt man also etwa

$$o' = -\frac{bc' - b'c}{ac' - a'c}, \quad \omega' = -\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b},$$

so erscheint die Involution gegeben durch die Punktepaare oo', $\infty\omega'$, und zwar ist ihre Gleichung, mit y das das Paar $x_1 x_2$ begleitende Element bezeichnet, nach (2′′):

$$k - \frac{kx}{\omega'} + y(x^2 - o'x) = o. \tag{2′′′}$$

Für die Involution conjugirter Punkte wird $\omega'' = \infty$ $o' = o$ und die Involutionsgleichung (2′′′) geht über in

$$k + yx^2 = o. \tag{3}$$

9. Jeder Involution entspricht ein Involutionskegelschnitt, welcher die Curve C_3^4 in drei Punkten berührt; diese drei Berührungspunkte sind jene, welche begleitende Punkte der Paare sind, welchen sie angehören. Man erhält ihre Parameterwerthe, wenn man in (2'') $y = x$ setzt; dies gibt für die Parameter der drei Berührungspunkte die cubische Gleichung:

$$(ac'-a'c)x^3+(bc'-b'c)x^2+k(ab'-a'b)x+ \\ +k(ac'-a'c)=o, \quad (4)$$

oder unter Benützung der Form (2'''):

$$x^3 - o'x^2 - \frac{k}{\omega'}x + k = o. \quad (4')$$

10. Die Gleichung zwischen den Parametern $x_1 x_2$ zweier Elemente einer Gruppe folgt in bekannter Weise[1] aus (2) und zwar in der Form:

$$(ab'-a'b)x_1x_2+(ac'-a'c)(x_1+x_2)+(bc'-b'c)=o \quad (5)$$

oder wenn man die Werthe $o'\ \omega'$ einführt:

$$x_1x_2 - \omega'(x_1+x_2) + o'\omega' = o. \quad (5')$$

Für die beiden Doppelelemente der Involution hat man jede der beiden folgenden Gleichungen, indem man in (5), respective (5') $x_2 = x_1 = x$ setzt:

$$(ab'-a'b)x^2+2(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)=o, \quad (6)$$

$$x^2 - 2\omega'x + o'\omega' = o. \quad (6')$$

11. Die Parameter der Inflexionspunkte erhält man aus der Fundamentalgleichung (1), wenn $x_1 = x_2 = x_3 = x$ gesetzt wird; dies gibt $x^3 = k$, woraus also für die drei Inflexionspunkte $i_1\, i_2\, i_3$ fliesst:

$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt[3]{k}, \\ i_2 &= \alpha\sqrt[3]{k}, \\ i_3 &= \alpha^2\sqrt[3]{k} = \frac{1}{\alpha}\sqrt[3]{k}. \end{aligned} \quad (7)$$

[1] Siehe: „Erzeugung algebraischer Curven durch projectivische Involutionen." Mathem. Ann. 1870, p. 36.

Es ist $\sqrt[3]{k}$ als arithmetischer Werth zu nehmen, und α, α^2 sind die beiden imaginären Kubikwurzeln aus der positiven Einheit, d. h.

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \alpha^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Conjugirte Punkte haben, weil sie mit ∞, o harmonisch sind, gleiche, nur entgegengesetzt bezeichnete Parameterwerthe, so dass also den Punkten $t_1 t_2 t_3$ die Werthe:

$$\begin{aligned} t_1 &= -\sqrt[3]{k}, \\ t_2 &= -\alpha\sqrt[3]{k}, \\ t_3 &= -\alpha^2\sqrt[3]{k} \end{aligned} \tag{8}$$

entsprechen.

Betrachten wir zunächst die Involution, welche $i_2 i_3$ als Doppelpunkte besitzt; diese treten auf als Wurzeln der Gleichung $(x-i_2)(x-i_3) = o$ oder mit Rücksicht auf (7):

$$(x-\alpha\sqrt[3]{k})(k-\alpha^2\sqrt[3]{k}) = o$$

oder

$$x^2 - \alpha\sqrt[3]{k}(1+\alpha)x + \sqrt[3]{k^2} = o.$$

Nun ist α eine Wurzel der Gleichung

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = o,$$

daher

$$\alpha(\alpha+1) = -1$$

und die Gleichung für die beiden Doppelpunkte lautet also

$$x^2 + \sqrt[3]{k}\,.\,x + \sqrt[3]{k^2} = o.$$

Vergleichen wir sie mit (6′), so ergibt sich

$$\begin{aligned} -2\omega' &= \sqrt[3]{k}, \\ o'\omega' &= \sqrt[3]{k^2}, \end{aligned}$$

somit:

$$\omega' = -\frac{\sqrt[3]{k}}{2}, \quad o' = -2\sqrt[3]{k}$$

und die Gleichung der Involution lautet somit nach (5'):

$$x_1 x_2 + \frac{\sqrt[3]{k}}{2}(x_1 + x_2) + \sqrt[3]{k^2} = o. \tag{9}$$

Ebenso findet man als Gleichung der Involution, welche i_1 und i_2 zu Doppelpunkten hat:

$$x_1 x_2 + \frac{\alpha^2}{2}\sqrt[3]{k}(x_1 + x_2) + \alpha\sqrt[3]{k^2} = o; \tag{9'}$$

und die Involution schliesslich, welche i_1 und i_3 zu Doppelpunkten hat, besitzt die Gleichung:

$$x_1 x_2 + \frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{k}(x_1 + x_2) + \alpha^2\sqrt[3]{k^2}. \tag{9''}$$

Man überzeugt sich leicht auf Grund der Gleichung (4') nochmals von der Richtigkeit des in Artikel 7 über die Berührungspunkte der Involutionskegelschnitte dieser Involutionen Gesagten.

Betrachten wir für den Augenblick nochmals die Involution, welche $i_2 i_3$ zu Doppelpunkten hat; die vom Doppelpunkte d der Curve C_3^4 an ihren Involutionskegelschnitt gehenden zwei Tangenten treffen die Curve in den Punkten $o'\omega'$ und da $o'\omega' = \sqrt[3]{k^2}$ und daher $o'\omega'\sqrt[3]{k} = k$ ist, so geht nach Gleichung (1) die Verbindungslinie der Punkte $o'\omega'$ durch den Inflexionspunkt i_1, wodurch der folgende Satz bewiesen ist.

„Legt man vom Doppelpunkte der Curve C_3^4 an den Kegelschnitt, welcher die Curve in zwei Inflexionspunkten und in dem zum dritten Inflexionspunkte conjugirten Punkte berührt, die beiden Tangenten, so treffen sie die Curve in zwei Punkten, welche auf einer durch den dritten Inflexionspunkt gehenden Geraden liegen."

Nun wird aber die Involution, welcher der erwähnte Kegelschnitt als Involutionscurve entspricht, durch die aus den Punkten der dritten Inflexionstangente (J_1) an C_3^4 gehenden Tangentenpaare bestimmt und es schneiden also die beiden Doppelpunktstangenten die Tangenten von o' und ω' in zwei auf dieser dritten Inflexionstangente liegenden Punkten. Somit gilt auch der Satz:

„Legt man aus den zwei Punkten, in denen die Doppelpunktstangenten eine Inflexionstangente (J_1) schneiden die noch an C_3^4 gehenden beiden Tangenten, so berühren sie die Curve in zwei Punkten $o'\omega'$, deren Verbindungsgerade durch den betreffenden Inflexionspunkt (i_1) hindurchgeht.“

Für die Involution, welche $t_2 t_3$ zu Doppelpunkten hat, findet man nach demselben Verfahren die Gleichung

$$x_1 x_2 - \frac{\sqrt[3]{k}}{2}(x_1 + x_2) + \sqrt[3]{k^2} = o; \tag{10}$$

die Gleichung der Involution, welche t_1 und t_2 zu Doppelpunkten hat, lautet:

$$x_1 x_2 - \frac{\alpha^2 \sqrt[3]{k}}{2}(x_1 + x_2) + \alpha \sqrt[3]{k^2} = o \tag{10'}$$

und die Gleichung der Involution schliesslich, welche t_1 und t_3 zu Doppelpunkten hat, lautet:

$$x_1 x_2 - \frac{\alpha \sqrt[3]{k}}{2}(x_1 + x_2) + \alpha^2 \sqrt[3]{k^2} = o. \tag{10''}$$

Auch bei diesen Involutionen haben die Punkte $o'\omega'$ die Eigenschaft, dass ihre Verbindungslinie durch den betreffenden Inflexionspunkt hindurchgeht. Betrachten wir z. B. die Involution (10), so ist für dieselbe $o'\omega' = \sqrt[3]{k^2}$ und daher geht wie bei den Involutionen (9) die Gerade $\overline{o'\omega'}$ durch den Inflexionspunkt i_1 hindurch u. s. w.

12. Es bleibt noch die Frage zu erörtern übrig, welche Involutionen die sechspunktigen Kegelschnitte der Curve C_3^4 zu Involutionscurven haben.

Betrachten wir z. B. den Kegelschnitt, welcher in t_1 die Curve C_3^4 in sechs unendlich nahen Punkten schneidet; derselbe ist ein Involutionskegelschnitt (als dreifach berührend), für welchen die drei Berührungspunkte in $t_1 = -\sqrt[3]{k}$ zusammenfallen. Die kubische Gleichung für die drei Berührungspunkte desselben ist somit $(x + \sqrt[3]{k})^3 = o$ oder:

$$x^3 + 3x^2\sqrt[3]{k} + 3x\sqrt[3]{k^2} + k = o.$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der allgemeinen (4'), so ergibt sich

$$-o' = 3\sqrt[3]{k},$$

$$-\frac{k}{\omega'} = 3\sqrt[3]{k^2},$$

woraus folgt:

$$o' = -3\sqrt[3]{k}, \quad \omega' = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{k}.$$

Die Gleichung der zugehörigen Involution lautet somit nach (5'):

$$x_1 x_2 + \frac{1}{3}\sqrt[3]{k}(x_1 + x_2) + \sqrt[3]{k^2} = o, \tag{11}$$

Die Doppelpunkte dieser Involution folgen aus der Gleichung (11), wenn man $x_2 = x_1 = x$ setzt; dies gibt:

$$x^2 + \frac{2}{3}\sqrt[3]{k}\,x + \sqrt[3]{k^2} = o,$$

woraus folgt:

$$x = \sqrt[3]{k}\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-8}}{3}\right).$$

Da für diese Involution ebenfalls $o'\omega' = \sqrt[3]{k^2}$ ist, so gilt auch hier der Satz, dass die Gerade $o'\omega'$ durch den Inflexionspunkt i_1 hindurchgeht:

„Wenn man aus dem Doppelpunkte d von C_3^4 an den Kegelschnitt, welcher C_3^4 in einem der t-Punkte in sechs zusammenfallenden Punkten schneidet, die beiden Tangenten legt, so schneiden sie C_3^4 in zwei Punkten, deren Verbindungslinie durch den zugehörigen Inflexionspunkt i hindurchgeht."

Durch identische Betrachtungen (oder indem man einfach $\alpha\sqrt[3]{k}$, respective $\alpha^2\sqrt[3]{k}$ statt $\sqrt[3]{k}$ substituirt) erhält man als Gleichungen der Involutionen, welche die in t_2, respective t_3 die Curve C_3^4 sechspunktig schneidenden Kegelschnitte zu Involutionscurven haben, die folgenden:

$$x_1 x_2 + \frac{\alpha}{3} \sqrt[3]{k}(x_1 + x_2) + \alpha^2 \sqrt[3]{k^2} = o, \tag{11'}$$

$$x_1 x_2 + \frac{\alpha^2}{3} \sqrt[3]{k}(x_1 + x_2) + \alpha \sqrt[3]{k^2} = o. \tag{11''}$$

Die Gleichungen für die Doppelpunkte dieser Involution erhält man einfach, indem man in (11'), (11''), $x_1 = x_2 = x$ setzt.

13. Bezeichnet man mit ef die Doppelpunkte einer beliebigen quadratischen Punktinvolution auf C_3^4, so sind ihre Parameter die Wurzeln der quadratischen Gleichung (6'):

$$x^2 - 2\omega' x + o' . \omega' = o.$$

Es ist somit $e . f = o'$ und daher auch $\frac{k}{e . f} = \frac{k}{o' . \omega'}$. Nun ist $\frac{k}{ef}$ der dritte Schnittpunkt von C_3^4 mit $\overline{ef}$ und $\frac{k}{o'\omega'}$ der dritte Schnittpunkt von $\overline{o'\omega'}$ mit C_3^4; beide diese Punkte sind somit identisch, und es gilt daher der Satz:

„Wenn ef die Doppelpunkte und $o'\omega'$ die dem Curvendoppelpunkte entsprechenden Punkte sind, so schneiden die Geraden $\overline{ef}$, $\overline{o'\omega'}$ die Curve C_3^4 in einem und demselben Punkte."

Aus der Abbildung der Curve C_3^4 auf einen Kegelschnitt (siehe Sitzungsbericht vom 20. März 1879) ergibt sich dieses Resultat sofort, indem man erkennt, dass ef und $o'\omega'$ zwei Punktepaare einer centralen Involution auf C_4^3 sind.

14. Unter den auf C_3^4 auftretenden Projectivitäten sind hauptsächlich jene zu bemerken, deren Doppelelemente die Nachbarelemente des Doppelpunktes sind. Wenn wir die Nachbarpunkte von d als Doppelpunkte zweier projectivischen Systeme auf C_3^4 annehmen, so wird die Beziehung durch weitere Annahme eines Punktepaares, $m_1 m_2$ etwa, bestimmt sein. Die Gleichung der Projectivität, für welche die Werthe o, ∞ den Doppelelementen entsprechen, ist bekanntlich $x_2 = c . x_1$, wenn $x_1 x_2$ entsprechende Elemente, respective deren Parameter bezeichnen. Hier ist nun $m_2 = c . m_1$, daher $c = \frac{m_2}{m_1}$ und die Projectivitätsgleichung lautet:

$$x_2 m_1 = x_1 m_2. \tag{12}$$

Für ein anderes Punktepaar $y_1 y_2$ hat man ebenso:

$$y_1 m_2 = y_2 m_1$$

und daher nach Multiplication der beiden letzten Gleichungen:

$$x_2 y_1 = x_1 y_2, \tag{12'}$$

somit auch:

$$\frac{k}{x_2 y_1} = \frac{k}{x_1 y_2};$$

nun ist aber $\frac{k}{x_2 y_1}$ der dritte Schnittpunkt von $\overline{x_2 y_1}$ mit C_3^4 und ebenso ist $\frac{k}{x_1 y_2}$ der dritte Schnittpunkt von $\overline{x_1 y_2}$ mit C_3^4; diese beiden Punkte sind also zufolge der letzten Gleichung identisch und man hat den Satz:

„Wenn $x_1 x_2$, $y_1 y_2$ zwei Paar entsprechender Punkte zweier projectivischen Systeme auf C_3^4 sind, für welche Systeme die beiden Nachbarpunkte des Curvendoppelpunktes die Doppelelemente darstellen, so schneiden sich die Verbindungslinien $\overline{x_1 y_2}$, $\overline{y_1 x_2}$ in einem und demselben Punkte der Curve C_3^4."

Man erhält somit aus einem Punktepaare $x_1 x_2$ die sämmtlichen anderen $y_2 y_1$ (in umgekehrter Ordnung), wenn man dasselbe aus den verschiedenen Punkten der Curve C_3^4 auf die Curve projicirt.

Wenn $x_2 = -x_1$ wird, so ist (nach 12') auch $y_2 = -y_1$. Die Involution der conjugirten Punkte der Curve ist somit ein specieller Fall der eben besprochenen Projectivität. Man sieht auch leicht ein, dass es die einzige quadratische Involution ist, welche unter diesen projectivischen Beziehungen auftritt.

15. Jeden Punkt der Curve C_3^4 kann man zu dem ersten oder dem zweiten Systeme rechnen, und jedesmal wird ihm ein anderer Punkt entsprechen. Wenn dem x_1 als Punkt des ersten Systems x_2 entspricht und man rechnet x_1 etwa als z_2 zum zweiten Systeme, so wird ihm z_1 im ersten Systeme entsprechen. Nun müssen sich die beiden Geraden $\overline{x_1 z_2}$ und $\overline{x_2 z_1}$ in einem Punkte von C_3^4 schneiden; aber $\overline{x_1 z_2}$ ist die Tangente in x_1, und somit geht $\overline{x_2 z_1}$ durch den Tangentialpunkt von x_1 hindurch.

Wenn also die drei Punkte $x_1 x_2 z_1$ in gerader Linie liegen sollen, so muss x_1 sein eigener Tangentialpunkt, d. h. also ein Inflexionspunkt sein. Umgekehrt geht durch jeden Inflexionspunkt der Curve eine Gerade von der Art $x_1 x_2 z_1$. Es sei nämlich auf C_3^4 irgend eine Projectivität der betrachteten Art gegeben. Zählen wir den Inflexionspunkt i zum ersten Systeme, so möge er mit j_1 bezeichnet werden und mit j'_2 als zum zweiten Systeme gehörig; die entsprechenden Punkte seien $j_2 j'_1$. Nun müssen sich die Geraden $j_1 j'_2$, $j_2 j'_1$ in einem Punkte von C_3^4 schneiden. Aber $j_1 j'_2$ ist die Inflexionstangente, somit geht die Gerade $j_2 j'_2$ durch den Inflexionspunkt hindurch.

„Ist auf C_3^4 eine Punkteprojectivität gegeben, für welche die Nachbarpunkte des Doppelpunktes Doppelelemente sind, so liegen die einem Inflexionspunkte entsprechenden Punkte mit ihm in gerader Linie."

Für jede Projectivität erhält man also durch jeden der Inflexionspunkte $i_1 i_2 i_3$ eine Gerade; diese Geraden sollen $J'_1 J'_2 J'_3$ genannt werden. Es ist sofort klar, dass die Projectivität und somit die drei Geraden $J'_1 J'_2 J'_3$ gegeben sind, wenn man eine von diesen Geraden kennt, weil diese C_3^4 in den zwei Punkten trifft, welche dem betreffenden Inflexionspunkte entsprechen, je nachdem man ihn zu dem einen oder dem andern Systeme rechnet.

Die Büschel der drei Geraden $J'_1 J'_2 J'_3$ sind somit projectivisch.

16. Geht die Gerade J'_1 in die Inflexionstangente J_1 über, so entspricht sich der Inflexionspunkt i_1 selbst; die projectivischen Systeme haben also drei Doppelpunkte, und folglich ist jeder Punkt ein Doppelpunkt, also auch i_2, i_3, so dass J'_2, J'_3 in J_2, J_3 respective übergeht.

„In den projectivischen Büscheln der Strahlen $J'_1 J'_2 J'_3$ sind also auch die drei Inflexionstangenten einander entsprechende Strahlen."

Wenn J'_1 in die von i_1 an C_3^4 gehende Tangente T_1 übergeht, so entspricht dem i_1, ob man ihn zu dem einen oder dem anderen Systeme rechnet, immer derselbe Punkt t_1, und in der That gehen in diesem Falle die projectivischen Systeme in die Involution conjugirter Punkte über; es werden somit auch J'_2, J'_3 in T_2, T'_3 respective übergehen.

„Auch die von den Inflexionspunkten an die Curve C_3^4 gehenden Tangenten T_1, T_2, T_3 sind einander entsprechende Strahlen der projectivischen Büscheln J'_1, J'_2, J'_3."

Wenn J'_1 in die Verbindungslinie der Inflexionspunkte i_1 mit dem Doppelpunkte d der Curve übergeht, so entspricht dem i_1, je nachdem man ihn zu dem einen Systeme oder zum andern rechnet, der eine oder der andere Nachbarpunkt des Doppelpunktes, d. h. also der eine oder der andere Doppelpunkt der projectivischen Beziehung; dann entsprechen aber diese Punkte jedem Punkte der Curve C_3^4, so dass auch J'_2, J'_3 durch d hindurchgehen.

„Auch die von den Inflexionspunkten nach dem Doppelpunkte der Curve gehenden Strahlen sind einander entsprechende Strahlen in den projectivischen Büscheln J'_1, J'_2, J'_3."

Lässt man nun endlich J'_1 in die Gerade J übergehen, welche die drei Inflexionspunkte enthält, so entsprechen dem Punkte i_1, je nachdem man ihn zu dem einen oder dem anderen Systeme rechnet, die Punkte i_2, respective i_3. Wird also i_1 mit j_1, j'_2 bezeichnet, so ist i_2 mit j_2 und i_3 mit j'_1 zu bezeichnen. Rechnet man nun j_2 als j''_1 zum ersten Systeme, so ergibt sich nach der in Art. 14 entwickelten allgemeinen Construction der Punkt i_3 als entsprechender j''_2. Die Projectivität ist also derartig, dass den Punkten $i_1 i_2 i_3$, wenn man sie zum ersten Systeme rechnet, die Punkte $i_2 i_3 i_1$ im zweiten Systeme entsprechen. Die Projectivität ist also eine cyklische. Hiedurch ist in anderer Art der Satz nachgewiesen:

„Die durch die drei Inflexionspunkte $i_1 i_2 i_3$ bestimmte cyklisch projectivische Verwandtschaft hat die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes zu Doppelelementen."

Eine cyklische Projectivität geht aber [1] bekanntlich in eine kubische Involution über, welche jedes der beiden Doppelelemente der Projectivität zu dreifachen Elementen besitzt.

Mit Rücksicht auf Art. 14 kann man somit den folgenden Satz aussprechen:

„Ordnet man die drei Inflexionspunkte einander cyklisch projectivisch zu, so sind die Nachbarpunkte des Doppelpunktes

[1] Siehe: „Grundzüge einer Theorie der kubischen Involutionen" Prager Abhandlungen.

der Curve die Doppelelemente der Projectivität und zugleich dreifache Elemente der durch die projectivischen Systeme dargestellten kubischen Involution. Aus einem beliebigen Tripel dieser Involution erhält man (nach 14) die sämmtlichen anderen Tripel, wenn man das erstere aus den einzelnen Punkten der Curve C_3^4 auf dieselbe projicirt.

Sind $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$ irgend zwei Tripel, so sind die beiden durch sie dargestellten Dreiecke in drei verschiedenen Arten perspectivisch, und die perspectivischen Centra $c_1 c_2 c_3$ liegen wieder auf der Curve C_3^4, ein weiteres Tripel der kubischen Involution bildend. Die drei Inflexionspunkte $i_1 i_2 i_3$ stellen auch ein Tripel dar; ebenso die drei zu ihnen conjugirten Punkte $t_1 t_2 t_3$."

Aus den Auseinandersetzungen, welche dem vorletzten Satze vorangehen, folgt sofort, dass, wenn J'_1 in J übergeht, auch J'_2, J'_3 mit J zusammenfallen: hieraus folgt:

„Die von den Geraden $J'_1 J'_2 J'_3$ gebildeten Büschel sind nicht nur projectivisch, sondern auch perspectivisch."

Da nun sowohl die Inflexionstangenten, als auch die nach dem Curvendoppelpunkte gehenden Strahlen einander entsprechen, so gehen die drei Perspectivitätsaxen durch den Curvendoppelpunkt und durch die Ecken des von den Inflexionstangenten gebildeten Dreieckes; es sind also die harmonischen Polaren der Inflexionspunkte.

„Die von den Strahlen $J'_1 J'_2 J'_3$ gebildeten perspectivischen Büschel haben die harmonischen Polaren der drei Inflexionspunkte zu perspectivischen Axen."

17. Setzt man auf der Curve C_3^4 zwei Punktsysteme in projectivische Beziehung und verbindet je zwei einander entsprechende Punkte durch gerade Linien, so hüllen diese offenbar eine Curve vierter Classe ein. Denn die durch einen Punkt p der Ebene gehenden Strahlen bestimmen auf C_3^4 eine kubische Involution, welche mit den beiden projectivischen Systemen vier Elementenpaare gemeinschaftlich hat; jedes dieser vier Punktepaare liefert eine durch den Punkt p gehende Tangente der Enveloppe.

Wenn die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes auch ein Paar entsprechende Punkte der beiden projectivischen Systeme

sind, so wird hiedurch die Classe der Enveloppe auf drei herabgesetzt.

Im allgemeinen Falle hat die als Directionscurve auftretende Curve vierter Classe drei Doppeltangenten, ist also rational. Denn eine Doppeltangente wird immer dann auftreten, wenn es einen Punkt gibt, welcher mit den beiden ihm in den zwei Systemen projectivisch entsprechenden Punkten in gerader Linie liegt. Ist nun etwa

$$A u u' + B u + C u' + D = o \tag{13}$$

die Gleichung der projectivischen Beziehung auf C_3^4 und ist v der dem Punkte u, wenn man ihn als v' zu dem gestrichenen Systeme rechnet, entsprechende Punkt, so hat man, wenn $\overline{uu'v}$ eine Doppeltangente werden soll, die Gleichungen (13) und auch:

$$A u v + B v + C u + D = o,$$
$$u u' v = k$$

zu erfüllen. Bestimmt man aus den beiden ersteren u' und v, und setzt die Werthe in die letzte Gleichung ein, so ergibt sich für u die kubische Gleichung:

$$B C u^3 + [D(B + C) - k A^2] u^2 + \\ + [D^2 - k A (B + C)] u - k B C = o, \tag{14}$$

wodurch unsere die Rationalität der Directionscurve vierter Classe betreffende Bemerkung erwiesen ist.

Aus der Gleichung 14 folgt überdies, dass die drei u-Punkte, durch welche die drei Doppeltangenten der Directionscurve hindurchgehen, in gerader Linie liegen.

Ist im Doppelpunkte der Curve C_3^4 ein Paar entsprechender Punkte vereinigt, so muss einer der Coëfficienten B oder C verschwinden. Wenn dies eintritt, so wird von den drei Wurzeln der Gleichung (14) eine gleich Null, die andere gleich Unendlich (wie es offenbar auch geometrisch zu erwarten ist) und die dritte liefert endlich die Doppeltangente der auftretenden Directionscurve dritter Classe.

Wenn schliesslich die Nachbarpunkte der Doppelpunkte von C_3^4 Doppelpunkte der projectivischen Beziehung werden, d. h. wenn der in den letzten Artikeln betrachtete Fall eintritt, so wird

$A = o$ und $D = o$, so dass die Gleichung (14) in $u^3 = k$ übergeht, woraus die Inflexionspunkte von C_3^4 folgen. In diesem Falle gehen also die drei Doppeltangenten der Directionscurve durch die Inflexionspunkte von C_3^4 hindurch. Dies folgt auch unmittelbar aus Art. 15 und man erkennt sofort, dass die drei Geraden $J'_1 J'_2 J'_3$ die drei Doppeltangenten der Directionscurve sind. Mit Rücksicht auf die Resultate, welche in Art. 15 und 16 in Bezug auf diese Strahlen $J'_1 J'_2 J'_3$ erhalten wurden, kann man den folgenden Satz aussprechen:

„Setzt man auf C_3^4 eine solche Projectivität von Punkten fest, dass die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes der Curve als Doppelelemente auftreten, so umhüllen die Verbindungslinien einander entsprechender Punkte eine Curve vierter Classe mit drei Doppeltangenten $J_1' J'_2 J'_3$; diese letzteren gehen durch die drei Inflexionspunkte $i_1 i_2 i_3$ hindurch und schneiden sich in drei Punkten, welche auf den harmonischen Polaren der drei Inflexionspunkte liegen.“

Wenn die Projectivität auf C_3^4 jene ist, in welcher die drei Inflexionspunkte cyklisch einander entsprechen, so fallen alle drei Doppeltangenten in die Gerade J, welche zur dreifachen Tangente wird. Wir haben also den Satz:

„Durch die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes von C_3^4 als dreifache Elemente betrachtet, wird auf C_3^4 eine (cyklisch-projectivische) kubische Involution bestimmt, deren Gruppen man bekanntlich aus irgend einer durch Projiciren derselben aus Punkten von C_3^4 auf C_3^4 erhält. Die durch die einzelnen Tripel dieser Involution bestimmten Dreiecke umhüllen eine Curve vierter Classe, welche die Gerade J (welche die drei Inflexionspunkte enthält) zur dreifachen Tangente hat. Sofort sieht man auch ein, dass diese Curve vierter Classe den Doppelpunkt von C_3^4 ebenfalls zum Doppelpunkte hat und zugleich in ihm dieselben Tangenten wie C_3^4 besitzt.“

Es lässt sich auch zeigen, dass die übrigen drei Doppelpunkte der Curve auf den harmonischen Polaren der drei Inflexionspunkte liegen.

18. Hat man auf C_3^4 eine kubische Punktinvolution, so ist die Enveloppe der Verbindungslinie entsprechender Punkte eine Curve vierter Classe mit einer dreifachen Tangente. Hiervon überzeugt

man sich folgendermassen. Die durch einen beliebigen Punkt p der Ebene gehenden Strahlen bestimmen auf C_3^4 eine (centrale) kubische Punktinvolution, welche mit der gegebenen vier Elementenpaare gemeinschaftlich hat; jedes derselben liefert eine durch p gehende Tangente der Involutionscurve.

Ist die Involution auf C_3^4 durch zwei beliebig gewählte Punktetripel $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$ bestimmt und legt man durch den Curvendoppelpunkt d_1, einen beliebig auf C_3^4 gewählten Punkt s und jedes der Tripel je einen Kegelschnitt, so werden die beiden Kegelschnitte sich noch in zwei Punkten $s' s''$ schneiden und man sieht nun sofort, dass die durch $d s s' s''$ gehenden Kegelschnitte die Curve C_3^4 in Punktetripeln unserer Involution schneiden. Beachtet man den durch die Geraden ds, $s' s''$ dargestellten Kegelschnitt des Büschels $d s s' s''$, so erkennt man sofort, dass die drei Schnittpunkte der Curve C_3^4 mit der Geraden $\overline{s' s''}$ auch ein Tripel der Involution darstellen. Hieraus folgt aber auch dass $s' s''$ dreifache Tangenten der Involutionscurve ist. Zugleich ist der Satz erwiesen:

„In jeder (allgemeinen) kubischen Punktinvolution auf C_3^4 gibt es ein gerades Punktetripel.“

„Enthält eine kubische Punktinvolution auf C_3^4 zwei gerade Tripel, so sind alle Tripel gerad und die Involution ist eine centrale.“

Denn offenbar wird sie in diesem Falle bestimmt durch Strahlen, welche durch den Schnittpunkt der beiden Geraden hindurchgehen, welche die beiden als gerade vorausgesetzten Tripel enthalten.

Hat man also auf C_3^4 eine kubische Punktinvolution allgemeiner Art, so bleibt die Gerade $s' s''$ fest, wie man auch s auf C_3^4 wählen mag. Zugleich sieht man, dass die Punkte $s' s''$ auf dieser Geraden eine quadratische Punktinvolution beschreiben, wenn s die Curve C_3^4 durchlauft.

19. Wenn die kubische Involution auf C_3^4 so beschaffen ist, dass die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes auch als einander entsprechende Punkte, also in einer Gruppe auftreten, so wird aus leicht ersichtlichen Gründen die Classenzahl der Involutionscurve auf drei herabgesetzt. Da eine kubische Involution durch zwei Elementenpaare und eine Gruppe bestimmt ist, so wird

man für eine Involution der erwähnten Art ein Punktetripel $a_1 a_2 a_3$ und ein Punktepaar $b_1 b_2$ beliebig auf C_3^4 wählen können. Legt man durch $a_1 a_2 a_3$ einen beliebigen Kegelschnitt A_2, welcher C_3^4 in drei Punkten $s' s'' s'''$ schneiden möge, und legt man durch $s' s'' s''' b_1 b_2$ einen zweiten Kegelschnitt B_2, so werden sich A_2 und B_2 noch in einem Punkte s schneiden, und wieder sieht man sofort, dass die Kegelschnitte des Büschels $s s' s'' s'''$ die Curve C_3^4 in den Tripeln unserer Involution schneiden.

Der Doppelpunkt d von C_3^4, respective seine Nachbarpunkte, bilden mit einem bestimmten Punkte, offenbar mit dem Schnittpunkte des Kegelschnittes $d s s' s'' s'''$ und der Curve C_3^4 eine Gruppe, und diese stellt offenbar das einzige gerade Tripel der Involution dar: Es ist also zu erwarten, dass die Involutionscurve dritter Classe eine durch d gehende Doppeltangente besitzen wird, nämlich die Verbindungslinie von d mit dem Punkte von C_3^4, welcher mit d eine Gruppe der Involution bildet.

Legt man aus den Punkten einer festen Tangente von C^4 an die Curve die Tangententripel, so bilden ihre Berührungspunkte eine kubische Involution auf C_3^4, welche die Inflexionspunkte und den Schnittpunkt der festen Tangente mit der Curve zu Doppelelementen hat. Auf welcher Geraden liegt die quadratische Involution der Punktepaare $s' s''$?

Wird die feste Tangente zur Inflexionstangente, so wird die Involution zu einer quadratischen.

20. Legt man von einem Punkt t der Curve C_3^4 an dieselbe die beiden Tangenten, so bilden die Berührungspunkte $x' x''$, wenn t auf C_3^4 sich bewegt, die quadratische Involution conjugirter Punkte. Die Doppelelemente derselben sind bekanntlich die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes der Curve.

Werden nun von x' die beiden Tangenten an C_3^4 gezogen mit den Berührungspunkten $x_1 x_2$, und ebenso von x'' die beiden Tangenten mit den Berührungspunkten $x_3 x_4$, so bilden diese beiden Punktepaare $x_1 x_2 x_3 x_4$ ein Quadrupel mit gemeinschaftlichem zweiten Tangentialpunkte t. Wenn sich t auf C_3^4 fortbewegt, so bilden offenbar alle diese Quadrupel eine biquadratische Involution. Man übersieht leicht, dass diese biquadratische Involution die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes der Curve zu vierfachen Elementen besitzt. In der That besteht sie auch aus zwei

involutorischen Involutionen zweiten Grades; indem die Paare $x_1 x_2$ den Paaren $x_3 x_4$ involutorisch zugeordnet sind.

21. Wird die Curve C_3^4 mit einem Kegelschnittsbüschel geschnitten, von dessen vier Scheiteln einer im Doppelpunkte d der Curve ist, so entsteht offenbar eine biquadratische Punktinvolution auf C_3^4. Und umgekehrt kann jede auf C_3^4 befindliche biquadratische Punktinvolution durch ein solches Kegelschnittbüschel herausgeschnitten werden.

In der That kann man durch die zwei die Involution bestimmenden Punktquadrupel und den Doppelpunkt d zwei Kegelschnitte legen, welche sich noch in drei weiteren Punkten $s_1 s_2 s_3$ schneiden, und es ist sofort klar, dass jeder durch die vier Punkte $d s_1 s_2 s_3$ gehende Kegelschnitt C_3^4 in vier einer Gruppe der Involution angehörenden Punkten schneidet.

„Legt man durch die Quadrupel einer auf C_3^4 befindlichen biquadratischen Punktinvolution und durch den Doppelpunkt der Curve Kegelschnitte, so gehen dieselben noch durch drei weitere feste Punkte, ein Büschel bildend.“

22. Die geraden Gruppen der C_3^4 stellen eine kubische Involution zweiter Stufe dar, und da in dem einer beliebigen biquadratischen Punktinvolution entsprechenden Kegelschnittbüschel $d s_1 s_2 s_3$ drei degenerirte Kegelschnitte auftreten, so ist klar, dass es nur drei gerade Tripel (nämlich die Schnittpunktstripel von C_3^4 mit den Seiten des Dreieckes $s_1 s_2 s_3$) gibt, welche auch in Gruppen der biquadratischen Involution vorkommen.

„Befindet sich auf einem Träger eine biquadratische Involution erster, und eine kubische Involution zweiter Stufe, so gibt es drei Elemententripel, welche beiden Involutionen gemeinschaftlich sind.“

23. Wird das Resultat des vorletzten Artikels auf die im Artikel (20) gefundene biquadratische Involution angewendet, so kommt man zu dem folgenden Resultate:

„Legt man durch den Doppelpunkt der Curve C_3^4 und durch die Punktquadrupel der Curve, welche einen gemeinschaftlichen zweiten Tangentialpunkt besitzen, Kegelschnitte, so gehen dieselben durch drei feste Punkte $s_1 s_2 s_3$ hindurch.“

Da die hier auftretende Punktinvolution im Doppelpunkte d zwei vierfache Elemente besitzt, so muss es unter den Kegel-

schnitten des Büschels $d s_1 s_2 s_3$ zwei geben, welche C_3^4 in d in noch vier unendlich nahen Punkten treffen; oder:

„Die drei im letzten Satze auftretenden Punkte $s_1 s_2 s_3$ sind die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte, welche mit der Curve C_3^4 im Doppelpunkte eine Berührung der vierten Ordnung eingehen."

Betrachten wir die beiden aus einem der drei t-Punkte an C_3^4 gehenden Tangenten, deren Berührungspunkte $\alpha' \alpha''$ sein mögen. Die Tangente von t schneidet C_3^4 in dem Inflexionspunkte i, welches sein eigener Tangentialpunkt ist; da i und t conjugirte Curvenpunkte sind, so liegen die drei Punkte $\alpha' \alpha'' i$ in einer Geraden und sind offenbar drei Punkte von C_3^4, welche einen gemeinschaftlichen zweiten Tangentialpunkt (in i) besitzen. Da der Punkt t ebenfalls i als zweiten Tangentialpunkt hat, so besteht ein Quadrupel der Involution aus den vier Punkten $\alpha' \alpha'' i t$, und der diesem Quadrupel entsprechende Kegelschnitt des Büschels $s_1 s_2 s_3 d$ besteht somit aus der die Punkte $\alpha' \alpha'' i$ enthaltenden Geraden und dem Strahle dt.

Es ist somit $\overline{\alpha' \alpha'' i}$ eine Seite des Dreiecks $s_1 s_2 s_3$ und die ihr gegenüber liegende Ecke dieses Dreiecks muss auf dt liegen. Die Gerade $\overline{\alpha' \alpha'' i}$ als zwei conjugirte Punkte $\alpha' \alpha''$ verbindend, ist Tangente des Cayley'schen Kegelschnittes; $\overline{it}$ ist die zweite durch t gehende Tangente desselben. Fassen wir alles eben Gesagte zusammen, so ergibt sich Folgendes:

„Aus den drei Inflexionspunkten $i_1 i_2 i_3$ einer C_3^4 gehen an den Caylay'schen Kegelschnitt ausser den Tangenten $i_1 t_1$, $i_2 t_2$, $i_3 t_3$ noch drei weitere Tangenten, welche ein Dreieck $s_1 s_2 s_3$ bestimmen, dessen Ecken auf den harmonischen Polaren der drei Inflexionspunkte liegen.[1] Jeder diesem Dreiecke umschriebene und durch den Doppelpunkt der Curve gehende Kegelschnitt schneidet die Curve in vier Punkten mit gemeinschaftlichem zweiten Tangentialpunkte. Die beiden unter den Kegelschnitten des Büschels $d s_1 s_2 s_3$, welche in d die Doppelpunktstangenten berühren, haben mit C_3^4 eine Berührung der vierten Ordnung."

---

[1] Die zwei Dreiecke $s_1 s_2 s_3$, $t_1 t_2 t_3$ sind perspectivisch mit d als Perspectivitätscentrum und $i_1 i_2 i_3$ als Perspectivitätsaxe.

24. Zieht man aus den vier Punkten, welche einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt besitzen, wiederum Tangenten an die Curve, so erhält man acht Berührungspunkte mit gemeinschaftlichem Tangentialpunkte. Alle diese achtpunktigen Gruppen bilden offenbar eine Involution des achten Grades, welche aus zwei involutorisch-projectivischen Involutionen vierten Grades besteht, von denen wiederum jede aus zwei involutorischen quadratischen Involutionen zusammengesetzt ist. Hieraus folgt, dass die acht Punkte einer solchen Gruppe auf zwei Kegelschnitten des Büschels $(ds_1 s_2 s_3)$ liegen und dass diese Kegelschnittspaare eine quadratische Involution bilden, für welche die beiden Kegelschnitte, welche C_3^4 in d berühren, die Doppelelemente darstellen.

Es ist klar, wie man in dieser Art weiter gehend zu dem folgenden Satze gelangt:

„Die Punktgruppen einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte d, welche einen gemeinschaftlichen n-ten Tangentialpunkt besitzen, bilden eine Involution vom Grade 2^n; die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes sind 2^n-fache Elemente der Involution.

Die 2^n Punkte einer Gruppe liegen zu Vieren in 2^{n-2} Kegelschnitten des Büschels $ds_1 s_2 s_3$. Diese 2^{n-2}-elementigen Kegelschnittsgruppen stellen eine Involution 2^{n-2}-ten Grades dar, für welche die beiden in d mit den zwei Curvenzweigen je fünf unendlich nahe Punkte gemeinschaftlich habenden Kegelschnitte 2^{n-2}-fache Elemente darstellen.“

25. Die Betrachtung der erwähnten Punktinvolutionen auf der Curve C_3^4 gestattet eine einfache Behandlung der Frage nach den der Curve gleichzeitig ein- und umschriebenen einfachen Polygonen.[1]

Construirt man in einem Punkte x von C_3^4 die Tangente, in ihrem Schnittpunkte x_1 mit C_3^4 wieder die Tangente, welche C_3^4 in x_2 schneiden möge u. s. w., so erhält man eine Reihe von Punkten $x\, x_1 x_2 x_3 \ldots$, von denen jeder der Tangentialpunkt des vorhergehenden ist. Verfolgt man die Reihe bis zum n-ten Tangential-

[1] Vergleiche: Dr. H. Durège, Über fortgesetztes Tangentenziehen an Curven dritter Ordnung u. s. w. Abhandl. d. kgl. böhm. Ges. d. Wiss. Prag 1869.

punkte x_n von x, so kann man die Frage stellen, wie vielmal es vorkommt, dass x_n mit x zusammenfällt. In einem solchen Falle ist dann offenbar $x_1 x_2 \ldots x_n$ ein einfaches n-Eck, welches der Curve ein- und umgeschrieben ist.

Geht man von dem Punkte x_n als dem n-ten Tangentialpunkte aus, so entsprechen ihm 2^n Punkte x, welche eine Gruppe der oben erwähnten Involution bilden; dagegen entspricht jedem x nur ein einziges x_n, so dass die Verwandtschaft zwischen x_n und x eine ein- — 2^n- — deutige ist und somit (2^n+1) gemeinsame Elemente auftreten werden. Es geschieht also (2^n+1) mal, dass ein Punkt x mit einem n-ten Tangentialpunkt zusammenfällt. Jeder der drei Inflexionspunkte hat nun auch die Eigenschaft, dass er mit seinem n-ten Tangentialpunkte zusammenfällt, so dass, wenn wir die Inflexionspunkte ausscheiden, sich die obige Zahl auf $2^n—2$ reducirt.

Den Fall $n=2$ kann man offenbar gleich übergehen; nehmen wir nun an, es wäre n eine Primzahl, so liefert jedes der Curve um- und eingeschriebene n-Eck n von den gemeinsamen Punkten und die Zahl der auftretenden n-Ecke ist offenbar

$$\frac{2^n-2}{n}.$$

Da für ein gerades n jeder der Nachbarpunkte des Doppelpunktes sein eigener n-ter Tangentialpunkt ist, so haben wir bei einem geraden n von der Gesammtzahl der gemeinsamen Punkte noch die Zahl zwei abzuziehen und es bleiben somit $2^n—4$ solcher Punkte, so dass, wenn n ausser den Divisen 2 keinen anderen Divisor enthält, die Zahl der ein- und umschriebenen n-Ecke

$$\frac{2^n-4}{n}$$

ist.

Es sei nun r ein Divisor von n, so dass $n=\alpha r$ ist (den Fall $r=2$ haben wir schon erledigt); so ist klar, dass jede Ecke eines der Curve um- und eingeschriebenen r-Ecks auch ein gemeinsamer Punkt jener ein- — 2^n- — deutigen Systeme ist. Jedes r-Eck liefert also r solche gemeinsame Punkte und wenn die Zahl der der Curve C_3^4 gleichzeitig ein- und umschriebenen r-Ecke

etwa z_r ist, so stellen die Ecken aller dieser r-Ecke offenbar r. der gemeinsamen Punkte dar. Sind also $r_1 r_2 r_3 \ldots$ die ausser 2 auftretenden Theiler von n, so hat man offenbar für ein ungerades n zur Bestimmung der Zahl z_n der gleichzeitig ein- und umgeschriebenen n-Ecke die Gleichung:

$$Z_n = \frac{2^n - 2 - \Sigma r . z_r}{n},$$

und für ein gerades n:

$$Z_n = \frac{2^n - 4 - \Sigma r . z_r}{n}.$$

Nach diesen zwei Formeln erhält man z. B. für:

$$n = 3,\ z_3 = \frac{2^3 - 2}{3} = 2,$$

$$n = 4,\ _4 = \frac{2^4 - 4}{4} = 3,$$

$$n = 5,\ z_5 = \frac{2^5 - 2}{2} = 6,$$

$$n = 6,\ (r_1 = 3),\ z_6 = \frac{2^6 - 4 - 3 . z_3}{6} = 9,$$

$$n = 7,\ z_7 = \frac{2^7 - 2}{7} = 18,$$

$$n = 8,\ (r_1 = 4),\ z_8 = \frac{2^8 - 4 - 4 . z_4}{8} = 30,$$

$$n = 9,\ (r_1 = 3),\ z_9 = \frac{2^9 - 2 - 3 . z_3}{9} = 59,$$

$$n = 10,\ (r_1 = 5),\ z_{10} = \frac{2^{10} - 4 - 5 z_5}{10} = 99,$$

$$n = 11,\ z_{11} = \frac{2^{11} - 2}{11} = 186,$$

$$n = 12,\ (r_1 = 3,\ r_2 = 4,\ r_3 = 6),$$

$$z_{12} = \frac{2^{12} - 4 - 3 z_3 - 4 z_4 - 6 z_6}{12} = 335,$$

$$n = 13,\ z_{13} = \frac{2^{13} - 2}{13} = 630,$$

$$n=14,\ (r_1=7),\ z_{14}=\frac{2^{14}-4-7z_7}{14}=1161,$$

$$n=15,\ (r_1=3,\ r_2=5),\ z_{15}=\frac{2^{15}-2-3z_3-5z_5}{15}=2182,$$

$$n=16,\ (r_1=4,\ r_2=8),\ z_{16}=\frac{2^{16}-4-4z_4-8z_8}{16}=4080,$$

$$n=17,\ z_{17}=\frac{2^{17}-2}{17}=7710$$

u. s. w., u. s. w.

$$n=20,\ (r_1=4,\ r_2=5,\ r_3=10),$$
$$z_{20}=\frac{2^{20}-4-4z_4-5z_5-10z_{10}}{20}=52377$$

$$n=30,\ (r_1=3,\ r_2=5,\ r_3=6,\ r_4=10,\ r_5=15),\ z_{30}=35790267$$ [1]

u. s. w.

Aus den bekannten Sätzen über die Schnittpunktsysteme einer Curve dritter Ordnung mit einer Curve n-ter Ordnung folgt sofort, dass die Ecken der zwei um- und eingeschriebenen Dreiecke solche Punkte sind, in denen C_3^4 von Curven dritter Ordnung in neun unendlich nahen Punkten geschnitten wird. In der That ergeben sich auch die Parameterwerthe der Ecken dieser Dreiecke aus der Gleichung:

$$x^9=k^3;$$

nebst ihnen treten auch die drei Inflexionspunkte auf.

---

[1] Durège, l. c.